REPUBLIQUE DU BENIN

------🙦🙧🙥🙤-----

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS MATERNEL ET PRIMAIRE

------🙦🙧🙥🙤-----

INSTITUT NATIONAL POUR LA FORMATION ET LA RECHERCHE EN EDUCATION

------🙦🙧🙥🙤-----

**MODULE DE FORMATION DES ENSEIGNANTS SUR LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**

**Guide du formateur**

**Année 2017**

**Objectifs de la formation**

* **Objectif général**

Renforcer son niveau de maîtrise des connaissances notionnelles en mathématique

* **Objectifs spécifiques**

Renforcer ses capacités de résolution des problèmes d’arithmétique

Renforcer ses capacités de résolution des problèmes de mesure

Renforcer ses capacités de résolution des problèmes de géométrie

* **Résultats attendus**

Les capacités de résolution des problèmes d’arithmétique sont renforcées

Les capacités de résolution des problèmes de mesure sont renforcées

Les capacités de résolution des problèmes de géométrie sont renforcées

**Durée :** 30 h

**Planning prévisionnel de la formation**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Premier jour** | **Deuxième jour** | **Troisième jour** |
| * Présentation des stagiaires et du stage. * Pré test * Relevé des attentes des stagiaires. | **Résolution de problème en géométrie** (*Compléments académiques sur les constructions géométriques)* | **Unité 3 : Analyse d’erreurs d’élèves dans les décimaux**  **Introduction des fractions**  prélude à la construction des nombres décimaux. |
| **Unité 1 :**  **Résolution de problèmes en géométrie**  (constructions géométriques et instruments de géométrie) | **Unité 2 : Lire et écrire des nombres avec des mots**  Identification du savoir sur l’écriture en lettres des nombres. | *Compléments académiques sur les nombres décimaux* |
| Suite et fin |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Après-midi | Après-midi | Après-midi |
| *Suite* | *Compléments académiques sur les systèmes de numération.* | * Post-test * Echanges pour la mise au point de l’organisation pratique des stages. * Bilan de la semaine de formation |

**Méthodes de formation**

Alternance de travaux individuels, travaux de groupes, apports d’informations

**Pré-test et post-test**

L’évaluation de cette formation au regard de ses objectifs sera réalisée par un questionnaire sur une activité de classe. L’activité extraite d’un manuel scolaire[[1]](#footnote-1) est la même pour le pré-test que pour le post-test ainsi que les questions (fiche fournie page suivante).

Le tableau suivant permet, à l’issue de la formation, de noter **l’évolution** des réponses (sur une échelle de 1 à 5) en comparant les réponses fournies au pré- test et au post -test. C’est cette évolution qui doit être prise en compte.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Nom du stagiaire | Exo 1 | Exo 2 | Exo 3 | Exo 4 | Exo 5 | Exo 6 | Exo 7 | Evolution générale |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Renforcement des connaissances académiques des enseignants en mathématique

Date de la passation du test :

Nom du stagiaire :

Prenez connaissance de ce document et répondez ensuite aux questions suivantes :

|  |  |
| --- | --- |
| Exercice 1 |  |
| Exercice 2 |  |
| Exercice 3 |  |
| Exercice 4 |  |
| Exercice 5 |  |
| Exercice 6 |  |
| Exercice 7 |  |

**Unité 1 : Résolution de problème en géométrie (constructions géométriques)**

Activité 0 **:** Réponses variables des participants. Les recueillir sans commentaires et les faire analyser à la fin

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Objectifs de la séance | * résoudre un problème de géométrie plane mettant en jeu la distance d’un point à un point donné et celle d’un point à une droite donnée. * utiliser les définitions et les propriétés d’un cercle, d’un disque, de deux droites parallèles. * réaliser des constructions géométriques à la règle, compas et équerre. | | |
|  | Formateur | Stagiaires |  |
| Matériel | * guide de formation * équerre, compas, règle (matériel collectif), ficelle d’environ 3 m de long | * Doc. 1 : Planter un arbre dans la cour de l’école * équerre, compas, règle (matériel individuel) * Doc 2 : Schéma de l’activité mathématique |  |
| *Déroulement* | Travail du formateur (consignes en italique) | Tâche des stagiaires et procédures et/ou réponses attendues | Remarques |
| *Phase 1«concrétisation »*  *(15 min)*  *Utiliser, en situation, les notions de distance de deux points, d’un point à une droite.* | 1. Faire venir deux stagiaires T et X. Placer T à un ou deux mètres du tableau, si possible en faisant en sorte qu’un objet (bureau ou chaise) soit entre lui et le tableau. Placer alors X à environ 2 ou 3 mètres de Y et du tableau. 2. Demander à deux autres personnes Y et Z de venir et leur donner la consigne :   *Placez-vous de telle sorte que vous deux et X vous soyez tous les trois à peu près à la même distance de T. Vous n’avez pas d’instrument de mesure.*   1. Faire venir une quatrième personne U. Lui demander de *se placer à peu près à la même distance que T du tableau.*   Puis, faire de même avec deux autres personnes V et W.  *Consigne à la classe entière :*  *Comment pourrait-on vérifier que X, Y et Z sont bien à peu près à la même distance de T ?*  *Comment pourrait-on vérifier que T, U, V et W sont bien tous les quatre à peu près à la même distance du tableau ?*   1. Procéder à une vérification collective. | * Evaluation visuelle de la distance entre T et X (longueur du chemin le plus court qui les sépare) et reproduction de cette distance pour placer Y et Z. * Evaluation visuelle de la distance de T au tableau en imaginant le chemin le plus court entre ces deux « objets » (celui qui est perpendiculaire au tableau). * Recherche des moyens de contrôle (utilisation d’une ficelle pour prélever une distance et la reporter, utiliser un objet possédant un angle droit (grand carton, table, etc.) pour vérifier l’angle droit. | Dans un premier temps, ces placements se font par simple perception (« à vue d’œil »).  Il s’agit de développer une représentation du concept de distances égales de points à un point fixe et de distances d’un point à une droite.  Le fait qu’il y ait un « obstacle » entre T et le tableau, peut conduire à considérer des chemins non perpendiculaires au tableau (conception erronée), et donc dont la longueur n’est pas la distance recherchée.  Le recours au matériel pour vérification se fait dans un second temps. Il n’est pas nécessaire de faire mesurer les longueurs à l’aide d’unité de mesure, l’utilisation d’une ficelle suffit (report et comparaison de longueur) et est préférable. |
| *Phase 2*  *Semi-abstraction*  *(45 min)*  *Résoudre un problème de construction géométrique dans une situation liée à une situation évoquée.*  *Rechercher des points répondant à des critères nécessitant une traduction des données numériques (distances) en termes géométriques* | 1. Faire prendre connaissance du document 2.1 « Planter un arbre dans la cour de l’école » du module. Préciser qu’il s’agit d’une activité qu’un enseignant a proposée à ses élèves après avoir conduit une séance analogue à ce que, eux, viennent de vivre.   Leur demander de se mettre par deux pour repérer ce que l’élève doit avoir compris pour s’engager ensuite dans le problème puis de répondre aux deux premières questions en explicitant les procédures à mettre en œuvre pour la question 2.  Après 4 ou 5 minutes, procéder à une mise en commun des réponses et engager un débat à propos du passage d’une situation réelle évoquée et sa représentation sur laquelle les élèves vont travailler. | * Observation du document, lecture et compréhension de la situation proposée : repérage des données de la situation et de la tâche à réaliser.   Faire exprimer en particulier que :   1. ce plan n’est pas la réalité mais la représentation d’une réalité évoquée ; 2. les élèves doivent avoir compris ce changement de cadre : passer de la réalité, non vécue par eux mais racontée, à la traduction de l’espace évoqué ; 3. les élèves doivent avoir perçue l’échelle utilisée et que les mesures données en *mètres* sur le terrain sont traduites en *centimètre* sur la plan. | C’est une situation que les élèves peuvent comprendre, mais il revient à l’enseignant de s’assurer de cette compréhension, en particulier en faisant repérer les éléments constitutifs du plan : les murs sont représentés par des droites, les arbres par des points ;  L’échelle est volontairement simple car ce n’est pas l’objet d’enseignement. |
| 1. Demander les réponses et les procédures utilisées.   Faire préciser en particulier la notion de la distance d’un point à une droite et de la construction associée pour mesurer cette distance.  Prévoir le plan reproduit au tableau pour visualiser les démarches au fur et à mesures.  . | * Utilisation de la règle graduée pour mesurer la distance des points représentant les deux arbres après avoir « traduit » les mesures à opérer sur le plan. * Utilisation de l’équerre pour tracer le segment à mesurer exprimant la distance du point représentant le manguier à la droite représentant le mur entre la cour et le terrain de sport. | Cette première question reprend ce qui a été réalisé précédemment mais avec une traduction de la situation : point, droite, longueur de segment, perpendiculaire à une droite passant par un point.  On s’aperçoit très vite de l’intérêt qu’il y a à désigner les objets géométriques pour pouvoir décrire des constructions. Les élèves devront aussi en voir l’intérêt et à accéder à ces codes. |
| 1. Demander ensuite de se remettre par deux pour répondre à la dernière question.   Observer les stagiaires au cours de la résolution, relever les difficultés, questionner pour aider éventuellement.  Procéder à un échange collectif sur les procédures utilisées. Faire réaliser le tracé au tableau (en prenant 10 cm pour 1 m).  La figure ci-dessous fournit les réponses aux premières aux questions de l’activité. Elle ne sera élaborée que progressivement par les stagiaires. | * Lecture et compréhension de la consigne. * Traduction de toutes les contraintes imposées par le Directeur de l’école en termes géométriques (désignons par M le point représentant le manguier et par *(d)* la droite représentant le mur le long de la route) :  1. Le point recherché est dans la cour, c’est-à-dire à l’intérieur de la cour ; 2. le point recherché se trouve sur le cercle de centre M et de rayon 5 cm 3. le point recherché est sur une droite parallèle à (d) distantes de 2 cm de *(d) (en fait, il y en a deux, mais la deuxième est à l’extérieure de la cour) ;*   Le point recherché doit vérifier ces trois contraintes.   * Utilisation des instruments de géométrie pour faire les différents tracés :  1. Le compas pour tracer le cercle de centre M et de rayon 5 cm sur lequel se trouve le point. 2. L’équerre et la règle graduée pour tracer la parallèle à (d) distante de 3 cm de (d) sur laquelle se trouve le point ; 3. Rechercher les points situés à la fois sur la parallèle tracée, sur le cercle et dans la cour.  * Ecriture de la réponse au problème posé : seul le point A répond à la question. Ce point désigne sur le plan le lieu où il faudra planter l’arbre dans la cour de l’école. | L’élève doit d’abord traduire que l’endroit recherché sur le terrain est représenté par un point.  Sont en jeu :  a- la notion de distance d’un point à une droite (chemin le plus court pour atteindre cette droite).  b- la notion de droites parallèles comme étant des droites dont l’écart est constant.  c-  la notion de cercle : ensemble des points tous équidistants d’un même point (centre du cercle)  Une seule parallèle nécessite un tracé, l’autre étant hors de « la cour ». Ce constat pourra être fait avec les élèves dans une séance ultérieure sur les parallèles. Ici, les élèves résolvent le problème par rapport à la situation.  Le modèle mathématique donne deux points répondant aux deux premiers critères. Le retour à la situation, l’arbre doit être dans la cour, permet d ‘éliminer celui qui se trouve dans le terrain de sport. On a là une illustration du retour à la situation pour interpréter le résultat trouvé par calcul dans la situation.  La démarche est la même que pour des problèmes numériques où l’interprétation des résultats est indispensable pour « écrie la phrase réponse ».  Une suite intéressante à ce problème est de demander aux élèves de rechercher comment on peut déterminer ce lieu sur le terrain : quels outils ? (ficelles, dam, etc.), quelles procédures ? |
| *Phase 3*  *« Abstraction »*  *(40 min)* | Proposer des recherches de points formulées en langage purement géométriques (travail par groupes de deux) puis échanges collectifs.  Par exemple, en reprenant le schéma ci-dessus et en ne considérant que les points P et M, la droite (d) et la droite (d’) (l’autre droite de la figure).  Par exemple, rechercher les points :  a- « situés sur la parallèle à (d) distante de 3 cm de (d) mais à moins de 5 cm de M » ;  b- « situés à moins de 3 cm de (d) et à moins de 5 cm de M  »  c- « situés à 3 cm de P et à 5 cm de M ». | * Recherche des stagiaires et réalisation des constructions :  1. segment [AB] à l’exclusion des points A et B : les points situés à moins de 5 cm de M sont ceux du disque de centre M et de rayon 5 cm à l’exception des points du cercle (à moins de…) ; 2. Intersection du disque de centre M et de rayon 5 cm et de la bande constituée des deux parallèles distantes de 3 cm, à l’exception des points du pourtour de cette zone ; 3. Pas de solution : ces deux cercles ne se coupent pas (la distance de leurs centres est supérieures à la somme des longueurs de leurs rayons). | Ces constructions géométriques qui répondent à des problèmes posées mettent en évidence qu’un problème peut avoir une, plusieurs ou pas de solution, et que c’est l’utilisation de connaissances mathématiques qui permet de prévoir et prouver.  Lors de la mise en commun, insister sur le vocabulaire « plus que », moins que », etc. et la nécessaire compréhension de ces expressions (souvent employées en mathématiques). |
| *Phase 4*  *(60 min)*  *institutionnaliser les nouvelles connaissances à retenir*  *rédiger un aide-mémoire pour fixer la connaissance ou la technique* | 1. Demander aux stagiaires de se regrouper par quatre pour dégager les savoirs mathématiques (académiques et techniques) utilisés ou construits au cours de cette activité.   Pour chacun de ces savoirs, de repérer à quel niveau de classe ils sont abordés.   1. Procéder à une mise en commun et élaborer collectivement un écrit (aide- mémoire) pour fixer ces connaissances (textes et/ou schémas pour aider à la visualisation). 2. Par groupe de quatre, retour sur le déroulement de la séance pour faire dégager les grandes phases de la séance.   Mise en commun. Faire dégager en quoi la situation proposée est une résolution de problème qui conduit à la construction de nouveaux savoirs.  Faire constater qu’ils ont résolu un problème sans avoir eu à « faire des opérations sur les nombres ».  Faire constater aussi, qu’en fonction des données, il y avait une, plusieurs ou pas de solution et que la validation des réponses apportées pouvaient être validées par l’apprenant (en vérifiant que le respect ou non des conditions imposées).   1. Demander aux stagiaires de prendre connaissance du schéma de l’activité mathématique fourni dans le document 2.2.   Commenter avec eux ce schéma et demander de l’utiliser pour décrire la situation qu’ils viennent de vivre. | * Recherche et formulation des savoirs académiques (notion de distance de deux points, d’un point à une droite, de deux droites ; cercle, disque, centre, rayon ; droites parallèles). * Elaboration d’un aide- mémoire (« ce que j’ai appris de nouveau et que je dois retenir).   Exemple d’aide- mémoire :  **Tous les points qui sont à la même distance d’un point fixe donné sont sur un cercle. Ce point est le centre du cercle, la distance commune entre tous les points et ce centre est la longueur du rayon.** *(faire un schéma)*  **La distance d’un point à une droite***: (faire un schéma visualisant la perpendiculaire et la longueur exprimant la distance).*  **Une droite est parallèle à une deuxième droite si la distance de chacun de ses points à la deuxième droite est constante**  *(faire un schéma pour visualiser l’écart constant de deux droites parallèles).*  **Le compas est un outil qui permet de prélever une longueur, de la reporter, de comparer deux longueurs.**   * **Le compas permet de tracer des cercles. L’écartement de ses branches est la longueur du rayon.** *(faire un schéma pour visualiser le compas, le cercle, le centre, le rayon).* | Il est important de donner une telle définition du cercle qui n’est souvent abordé que par la figure que l’on obtient avec le compas. Les élèves savent tracer un cercle de centre O et de rayon 4 cm mais sont incapables de dire qu’un point situé à 4 cm du point A se trouve sur le cercle de centre A et de rayon 4 cm, donc ils n’ont pas construit le concept de cercle.  Il en va de même pour les droites parallèles. |

**PHASE 5 : QUELQUES COMPLEMENTS THEORIQUES SUR LE CONCEPT DE DISTANCE ET DES INSTRUMENTS DE DESSIN GEOMETRIQUE**

1- **Distance**

La distance est en général la mesure de la longueur d’un segment. On parlera alors de la distance de deux points. Cette idée simple peut s’avérer plus complexe quand il s’agit de la distance d’un point à une droite. On considèrera alors que la distance de ce point à la droite est la mesure de la longueur du segment formé du point et du pied de la perpendiculaire à cette droite passant par ce point. L’ensemble des points situés à égale distance d’une droite est une droite (en fait il en existe deux) parallèle à la droite donnée.

On peut également tracer des segments de même longueur ayant tous une extrémité commune. Si on en a suffisamment tracés, les autres extrémités semblent former une courbe. En imaginant qu’il n’y a pas de vide et que l’on relie ces points, la figure obtenue est un cercle dont le centre est le point donné et le rayon la distance donnée.

Remarque : les points entre les deux parallèles sont à une distance inférieure à la distance des parallèles et les points à l’intérieur du cercle sont à une distance inférieure au rayon.

2- **Des instruments de dessin géométrique : le compas et la règle, l’équerre**

Pour rendre compte du monde sensible, les inventeurs de la géométrie (les grecs) sont partis de deux « courbes » que sont le cercle et la droite et de ce fait ont utilisé deux instruments de dessin : la règle et le compas.

Ces deux instruments produisent donc les deux figures les plus pures : la droite et le cercle qui, par intersection permettent de considérer les points, éléments de base du dessin géométrique. Lors des apprentissages à l’école élémentaire, on y adjoint la règle graduée et l’équerre.

Chaque instrument a une double fonction :

Produire des informations supplémentaires sur une figure ; par exemple, à l’aide d’une règle on peut tracer une droite passant par deux points (étudier l’intersection de cette droite avec une autre déjà tracée, positionner d’autres points, etc.)

Prélever des informations sur une figure organisée ; ainsi, à l’aide d’un compas, on prélève la distance entre deux points pour la reporter ailleurs sur le dessin ou la comparer à une autre distance de ce même dessin.

La règle

La règle non graduée permet de tracer des droites passant par deux points, de tracer un segment de droite d’extrémités connues. Elle permet de contrôler que trois ou plusieurs points sont alignés. La règle graduée permet, en outre, de dessiner un segment dont on connaît la mesure de sa longueur. Avec un double décimètre, on prélève la mesure de la longueur d’un segment.

A l’école élémentaire, on utilise parfois une bande de papier (ou le bord d’une feuille de papier vierge pour prélever une longueur. On n’obtient pas une mesure (un nombre), mais le dispositif est suffisant pour pouvoir reporter cette longueur ou la comparer à une autre longueur. Dans ce cas, cette bande de papier a la même fonction que le compas (à pointes sèches).

Le compas

Il sert à tracer des cercles ou des arcs de cercle de centre et de rayon donnés. Néanmoins il sert aussi à prélever une longueur. Cette longueur prélevée sert en général à tracer un cercle ayant un rayon déterminé, mais également à reporter cette longueur sur une droite pour tracer un segment de cette longueur.

L’équerre

Elle sert à tracer des angles droits et des droites perpendiculaires. En la faisant glisser, on s’en sert pour tracer des droites parallèles. Avec l’équerre, on peut contrôler qu’un angle est droit, que deux droites sont perpendiculaires.

**Activité 6** : Retour sur l’ensemble des activités de l’unité

Il s’agit de favoriser les échanges des participants sur les deux points retenus au niveau du cahier du participant

**Unité 2 : Ecrire des nombres en chiffres et en lettres**

**Activité 0** : Réponses variables des participants . Les recueillir sans commentaires et les analyser à la fin

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Objectifs de la séance | * Faire analyser des productions d’élèves dans le domaine des nombres et de la numération et interpréter les erreurs en vue de les prendre en compte pour penser les apprentissages. * Faire prendre conscience des différences de fonctionnement de la numération écrite (avec des chiffres) et orale (avec des mots). | | |
|  | Formateur | Stagiaires |  |
| Matériel | * guide de formation * deux jeux d’étiquettes nombres (matériel collectif ; étiquettes de format 1/3 de feuille A4) | * Doc. 7 : « Fiche numération analyse d’erreurs » * Doc.  : « Planche des étiquettes nombres » * Doc. : « Activité présentée dans un manuel » * Doc.  : « Les différents systèmes de désignation des nombres entiers » * Une paire de ciseaux |  |
| *Déroule-ment* | Travail du formateur (consignes en italique) | Tâche des stagiaires et procédures et/ou réponses attendues | Remarques |
| *Phase 1*  *(50 min)*  *analyser et interpréter des erreurs d’élèves liées à la numération*  *expliciter des procédures de calcul mental s’appuyant sur la numération* | 1. Répartir les stagiaires en groupes de quatre et distribuer le document 3-1 : « Fiche numération analyse d’erreurs».   Leur demander de prendre connaissance de ce document. Préciser que les réponses aux exercices 1 et 2 sont réellement des réponses apportées par des élèves de CE2 lors d’une évaluation.  *Consigne : Analyser chaque production d’élève de la partie A en essayant d’interpréter les erreurs en fonction des écrits disponibles.*  *Puis traiter la partie B concernant des exercices de calcul mental. Faites ces calculs, expliciter vos procédures et rechercher, éventuellement, d’autres procédures de calcul possible. Préciser les propriétés utilisées ».*  Pendant les travaux de groupes, observer les échanges, éventuellement questionner, inciter à approfondir les analyses et à expliciter clairement les interprétations.   1. En plénière, confronter les analyses, apporter les précisions nécessaires.   Faire dégager les causes que l’on peut invoquer pour expliquer les productions d’élèves :   * mauvaise maîtrise de la numération écrite chiffrée : signification des chiffres qui composent les nombres * numération orale (avec des mots) non construite * utilisation de « récitatifs » pour calculer les opérations non rattachés à du sens.   **La réflexion sur les procédures de calcul mental met en évidence l’importance que revêt une excellente maîtrise de la numération (sens des écritures) et des opérations (sens et propriétés).** | * Echange entre les membres du groupe. * Repérage des erreurs et, pour chaque réponse, émission d’hypothèses sur les procédures mises en œuvre par les élèves.   Eléments d’analyse :   1. 8017, 100204, 6013 : est la traduction de ce que l’on entend.   613 : l’élève a pu reconnaître la « famille des soixante » et en a déduit le nombre commence par 6 puis a complété par ce qu’il entend (13).   1. Calcul de 268+57   Le calcul posé en alignant les nombres à gauche puis en exécutant l’algorithme de gauche à droite.  Pas de prise en compte de la signification des chiffres et de l’opération : alignement des dizaines sous les centaines puis exécution d’un récitatif en « transportant » des retenues qui n’ont aucune signification…   * Réflexion sur les procédures de calcul mental.  1. « dire » le nombre, deux cent quatre-vingt-seize facilite la calcul : la moitié de 200 🡪 100, la moitié de 80 🡪 40, la moitié de 16 🡪 8 donc la moitié de 296 est 148. 2. 3 fois 26, c’est 3 fois 20… 60 et 3 fois 6… 18 donc le résultat de ce produit est 78. 3. 3 fois 41, c’est 3 fois 40 (120) et encore 3 fois 1 (3), le résultat de ce produit est 123. 4. 180 pour aller à 200 🡪 20 ;   200 pour aller à 325 🡪 125 ; donc le résultat de cette différence est 145. | Les erreurs proposées ci-contre sont couramment rencontrées dans les classes. Néanmoins, les analyses que l’on peut en faire ici ne peuvent que conduire à émettre des hypothèses quant à la procédure utilisée par l’élève. Il faudrait disposer d’autres productions du même élève pour s’assurer que la même erreur est toujours reproduite.  Ces trois nombres énoncés oralement évoquent 100+20+4, 60+13, (4x20) +10+7… écritures additives dans lesquelles se trouvent aussi des écritures multiplicatives… Autant d’obstacles à la construction de la numération.  a) et b) s’appuient sur les groupements particuliers de la numération orale  c) décomposition de 41 en 40 + 1  d) s’appuie sur la représentation des nombres sur la droite numérique : on demande de calculer un écart, c’est ce qu’il faut rajouter au plus petit pour atteindre le plus grand. |
| *Phase 2*  *(50 min)*  *dégager les caractéristiques des numérations écrite et orale* | 1. Enoncer un nombre, par exemple 1 533 et demander d’écrire les mots nécessaires pour écrire ce nombre.   En utilisant tous ces mots, peut-on écrire d’autres nombres de 5 chiffres ? Les écritures chiffrées de ces nombres comportent-elles uniquement les chiffres de 3 513 ?   1. Faire rechercher tous les mots utilisés pour nommer les nombres d’au plus quatre chiffres sans tenir compte pour cet inventaire des traits d’union, des « et » et des « s ».   Ecrire ces mots au tableau et poser des questions : combien de mots pour écrire les nombres inférieurs à 20 ? à 100 ? à 1000 ?à 1 000 000 ?   1. Reconstituer les groupes de quatre, et distribuer les documents 3.2 « planche des étiquettes nombres » et 3.3 : « Activité présentée dans un manuel » (Diagonale » Mathématiques CE2, éd. Nathan).   *Consigne : Prendre connaissance de l’activité proposée aux élèves. La réaliser entre vous.*  *A l’issue de l’activité, dégager les savoirs travaillés avec les élèves dans cette activité et les remarques qui pourraient être formulées et faire l’objet d’un écrit pour fixer les connaissances.*   1. En plénière, confronter les propositions des différents groupes et établir une synthèse collective.   Les objectifs visés par cette séance sont le renforcement de la connaissance des écritures des nombres en lettres et la prise de conscience des fonctionnements différents de la numération écrite et de la numération orale.  (se reporter aux informations complémentaires données dans la phase 4 ci-dessous). | Recherche collective des nombres : 5133 ; 5330 ; 3530 ; 3135.  Remarque : seul le chiffre des dizaines reste inchangé puisque qu’il traduit le mot *trente*.  Recherche des mots.  Les stagiaires devront remarquer :-   * que 21 mots suffisent pour écrire tous les nombres de 1 ou 2 chiffres dont 17 pour écrire les nombres jusqu’à 20 : ce sont ces nombres qui sont étudiés au CI ; leur apprentissage est primordial et nécessite des activités spécifiques. Se rajoutent ensuite au CP les mots trente, quarante, cinquante, soixante. * qu’en ajoutant le mot cent, on peut écrire 900 nombres supplémentaires et qu’en ajoutant encore un autre mot, mille, on peut écrire 9 000 autres nombres.   Exemples de remarques possibles :   * Le tirage de quatre cartes chiffres permet toujours de composer un nombre de quatre chiffres (sauf s’il y a quatre zéros !). * Le tirage de quatre cartes mots ne permet pas toujours d’utiliser toutes les cartes pour écrire un nombre, certaines juxtapositions sont impossibles) et ne permettent pas toujours d’écrire un nombre de quatre chiffres. * Pour un nombre de quatre chiffres, il faut obligatoirement le mot *mille* mais pas obligatoirement le mot *cent* (dans ce cas, le chiffre de dizaine est 0). * Un même chiffre placé à des rangs différents ne se traduit pas de la même façon avec des mots, cela dépend de sa position dans l’écriture (5 à la position des dizaines se dit cinquante et se dit 5 s’il est à la position des centaines ou des unités). * La carte *zéro* ne sert qu’à écrire le nombre 0, sinon, elle n’est jamais utilisée même lorsqu’il y a des 0 dans le nombre. * Le mot *un* n’est utilisé que s’il est en position finale dans l’écriture du nombre, sinon on ne le prononce pas (1 263, 5 126, 512, 421). | 23 mots permettent d’écrire tous les nombres inférieurs à un million.  Lors d’activités avec des élèves, dans un premier temps, laisser composer les écritures avec les étiquettes nombres ; dans un second temps, il faudra exiger une orthographe correcte.  La liste donnée est ci-contre n’est évidemment pas exhaustive. |
| *Phase 3*  *(40 min)*  *comparaison des deux systèmes de numération.* | Par groupe de quatre ou cinq, dégager les caractéristiques fondamentales des deux systèmes de numération.  Echange en plénière. Prise de connaissance et explicitation du document 3.4 : Les différents systèmes de désignation des nombres entiers.  Insister sur le fait que ces différences structurelles nécessitent des apprentissages spécifiques pour que les élèves comprennent leur fonctionnement. | Prise de connaissance du document 3.4 et demande d’éclaircissements éventuels. |  |

**Phase 4 : Quelques compléments sur les deux systèmes de numération[[2]](#footnote-2)**

Au cycle 2[[3]](#footnote-3), les élèves ont découvert différents rôles du nombre dans un champ numérique de l’ordre du millier.

L’aspect cardinal du nombre a été travaillé dans des activités de dénombrement ou de comparaison de collections. L’aspect ordinal du nombre a été travaillé dans des activités de repérage d’une position d’un nombre sur une piste graduée, le nombre pouvant représenter une date, une température, une heure. Les élèves ont aussi découvert le nombre comme outil pour mesurer une grandeur ou pour effectuer des prévisions.

Au cours du CE2, il s’agit de reprendre ce travail dans un champ numérique jusqu’au million. Le but ultime est d’amener les élèves à comprendre les algorithmes de calcul écrit et à développer des stratégies de calcul réfléchi. La maîtrise de la numération conditionne un bon usage des algorithmes opératoires. Ainsi l’addition 123 + 375 sera un jeu d’enfant si l’élève a bien intégré que 123 = 100 + 20 + 3 et que 375 = 300 + 70 + 5.

Il en est de même pour la construction progressive des autres algorithmes de calcul.

Il s’agit également de mener un travail spécifique sur la numération orale de manière à permettre aux élèves d’en comprendre les règles de fonctionnement qui n’ont été qu’abordées dans les classes antérieures. C’est souvent en effet au moment de la rencontre avec des « grands nombres » que la non-maîtrise par certains élèves des liens entre numération écrite et numération orale devient apparente.

Nos deux systèmes de numération des nombres entiers sont comme deux « langues différentes » pour désigner les nombres, l’une verbale appelée souvent numération orale mais qui peut se trouver sous forme écrite en lettres, l’autre en chiffres appelée numération écrite. Il ne suffit donc pas de proposer des dictées ou des lectures de nombres pour aider les élèves à dépasser leurs éventuelles difficultés.

**Des difficultés fréquentes**

Dès le CP, les élèves sont confrontés aux différences fondamentales de fonctionnement des deux systèmes de numération : lire le groupe de signes « 18 » en disant « dix-huit », et comprendre que 18 est construit à partir de 10 et de 8 par une addition (10 + 8). Or, il n’est pas rare d’observer des élèves qui lisent « 18 » en énonçant « dix-huit » et simultanément considèrent que 18 c’est 8 et 1 (donc 9 !).

Au cours du cycle 3, certains élèves ont toujours des difficultés à voir dans une écriture chiffrée autre chose que les « chiffres » qui le composent : dans 4 537 par exemple, ils sont capables de repérer que 5 est le chiffre des centaines, mais ne parviennent pas à envisager 5 comme la « trace » de 500 ; pour d’autres, le fait que le nombre 4 537 contient 45 centaines n’est pas encore acquis.

Faisons un tour des erreurs les plus fréquentes.

* + Certains élèves codent séparément avec des « chiffres » chacun des mots-nombres entendus et juxtaposent ces codes : par exemple, quatre-vingt(s) écrit 420 ou quatre cent sept écrit 4007 ou encore 41007.
  + Les relations « somme » sont souvent moins bien maîtrisées que les relations de type produit. Ainsi, quatre cents est bien écrit 400, mais « cent » suivi de mots nombres peut encore poser des problèmes à certains élèves qui écrivent par exemple 10016 pour le nombre « cent seize ». Il est probable que, pour ces élèves, chaque symbole entendu rend compte d’une collection d’unités[[4]](#footnote-4).
  + Pour écrire « cent seize », d’autres élèves proposent 1016. Ils ont sans doute observé des régularités et se sont créé des règles de construction erronées de la forme suivante : 101 ; 102 ; 103 ; ... ; 109 ; 1010 ; ... ; 1016, proche de la manière de les dire.
  + Pour les « grands nombres », ce sont souvent les coefficients de mille ou de millions qui posent problème alors que les élèves écrivent sans erreur les trois derniers chiffres. Le problème peut venir d’une mauvaise segmentation de la suite de mots-nombres composant le nom du nombre, alors que les élèves ont bien retenu qu’on « n’écrivait pas de chiffres » lorsque l’on entend les mots « million », « mille » ou « cent ».

Par exemple, pour le nombre trois cent quatre-vingt mille huit cent vingt-sept, on peut trouver les erreurs suivantes :

trois /cent quatre /vingt mille huit cent vingt-sept 🡪310420827

trois cent quatre /vingt mille huit cent vingt-sept 🡪30420827

trois cent/ quatre-vingt mille/ huit cent vingt-sept 🡪30080827

trois/ cent quatre-vingt mille/ huit cent vingt-sept 🡪3180827

Pour d’autres enfin, c’est le rôle des zéros qui n’est pas pris en compte :

vingt-quatre mille trois cent huit écrit 2438.

**Les différents systèmes de désignation des nombres entiers**

Revenons rapidement à la question qui nous occupe : les différentes manières de désigner les nombres.

Les numérations les plus « performantes » sont celles qui permettent de coder tous les nombres (donc une infinité) avec un nombre fini de symboles et de faire des « calculs » sur ces codages sous forme d’algorithmes relativement simples et fiables. C’est le cas de notre numération écrite de position, mais ce n’est pas le cas de notre numération orale.

Pour définir une numération, il est donc nécessaire de préciser la valeur des groupements successifs (la base), les symboles utilisés et les règles d’agencement de ces symboles pour désigner des nombres.

Le tableau ci-dessous permet de mettre en évidence les ressemblances et les différences entre nos deux systèmes de désignation des nombres.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Numération écrite** | **Numération orale** |
| Valeur(s) des  groupements | Groupements uniquement par dix | Groupements par dix, mais aussi des groupements auxiliaires par mille, million, etc. |
| Symboles | Dix symboles exactement :  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0 | Une grande quantité de mots, que nous appelons souvent « mots-nombres » :  – neuf mots qui correspondent à la lecture des chiffres :  un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf ;  – des mots qui correspondent aux différentes puissances de la base : dix, cent, mille, million, etc. ;  – cinq mots pour certains multiples de 10 (certaines dizaines) :  vingt, trente, quarante, cinquante, soixante ;  – six mots « anomalies » onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize ;  – le mot zéro qui ne sert qu’à se désigner lui-même mais qui n’entre dans la composition d’aucun autre nom de nombre. |
| Nécessité d’un zéro | Oui, le zéro marque l’absence de groupements d’un certain rang. | Non, sauf pour donner oralement le résultat nul d’un dénombrement ou d’une opération. |
| Règles de combinaison | C’est la position du chiffre dans le nombre qui indique de quelle puissance de dix il est le coefficient. La juxtaposition des symboles chiffres n’a donc pas une valeur opératoire.  4 708 :  4 mille 7 centaines 0 dizaine 8 unités | La juxtaposition des « mots-nombres » a toujours une valeur opératoire. Plusieurs règles permettent de trouver le nombre :  – par addition  dix-huit 10 + 8  soixante-dix 60 + 10  – par multiplication  trois mille 3 × 1 000  quatre-vingts 4 × 20  – par addition et multiplication  quatre-vingt-dix (4 × 20) + 10  six mille sept cent quarante-sept  (6 × 1 000) + (7 × 100) + 40 +7  – encore plus complexe  deux cent vingt-sept mille cinq cent huit  [(2 × 100) + 20 + 7] × 1 000 + [5 × 100] + 8 |
| Type de numération | Numération de position | Numération hybride |

Les différences structurelles entre les deux numérations nécessitent des apprentissages spécifiques pour que les élèves puissent comprendre leur fonctionnement. La calculatrice peut aider les élèves à prendre conscience du fait que la valeur d’un chiffre dépend de la position qu’il occupe dans l’écriture chiffrée d’un nombre ; ainsi, afficher un nombre, puis sans le réécrire, changer un chiffre en un autre aide à travailler cet aspect : pour transformer 657 en 687, il faut ajouter 3 dizaines, c’est-à-dire 30 et non 3.

La compréhension et la maîtrise des règles de la numération écrite conditionnent l’accès aux règles de comparaison et aux algorithmes de calcul mental et écrit.

Les élèves doivent apprendre à associer les différentes formes fondamentales de désignations des nombres : écriture chiffrée, écriture en lettres, décomposition additive, décomposition canonique, décomposition auditive, mise en évidence des différents groupements, comme le montre figure ci-dessous.

deux centquarante sept sept sesseseseptt quarantesept-sesept

200 + 40 + 7

2 c 4 d 7 u

(2 x 100) + 40 + 7

(2 × 100) + (4 × 10) + 7

247

Les élèves doivent également reconnaître le nombre sous d’autres formes issues des précédentes par permutation des termes ou regroupements, par exemple pour 247 :

7 + (2 × 100) + (4 × 10) ou 7 + (24 × 10) ou 24d 7 u ou 47 u 2 c ou 247u.

**Activité 4**: Retour sur l’ensemble des activités de l’unité

Il s’agit de favoriser les échanges des participants sur les deux points retenus au niveau du cahier du participant.

**Unité 3 : Introduction des fractions**

**Activité 0 :** Réponses variables des participants. Les recueillir sans commentaires et les analyser à la fin

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Objectifs de la séance | * Faire conduire une réflexion sur la construction des nombres décimaux. * Faire prendre conscience de l’insuffisance des nombres entiers pour résoudre certains problèmes et donc de la nécessité de disposer de nouveaux nombres. * Introduire les écritures fractionnaires. | | |
|  | Formateur | Stagiaires |  |
| Matériel | * guide de formation * des bandes découpées dans des feuilles non lignées, toutes de même longueur (une douzaine de cm environ) mais de largeurs différentes (environ entre 3 et 6 cm). Prévoir une bande pour deux stagiaires. | * Des feuilles A4 non lignées. * Doc. 4.1 : « Décimaux : des productions d’élèves » * Doc .4.2 : « Un partageur de segments » * Doc. 4.3 : « Décimaux : progression d’un manuel »  (Diagonale, éd. Nathan) | Il n’est pas nécessaire d’avoir une bande unité facilement mesurable avec un double décimètre, au contraire car on exclut tout recours à un outil de mesure gradué. |
| *Déroulement* | Travail du formateur (consignes en italique) | Tâche des stagiaires et procédures et/ou réponses attendues | Remarques |
| *Phase 1*  *(40 min)*  *Analyser des erreurs d’élèves*  *Conduire une réflexion sur le statut de l’erreur dans les apprentissages* | 1. Répartir les stagiaires en groupes de quatre et leur demander de prendre connaissance du document 4-1 : « Décimaux : des productions d’élèves ».   Préciser qu’il s’agit de réponses réellement apportées par des élèves de fin de l’école primaire lors d’une évaluation.  *Consigne : Analyser chaque production et proposer une interprétation des erreurs.*  Pendant les travaux de groupes, observer les échanges, éventuellement questionner, inciter à approfondir les analyses et à expliciter clairement les interprétations.   1. En plénière, confronter les analyses faites par chaque groupe et apporter les précisions nécessaires.   Faire prendre conscience que ces erreurs sont à distinguer des erreurs dues à la fatigue, à l’étourderie, à une méconnaissance de table ; etc. Comme le souligne Guy Brousseau[[5]](#footnote-5), **«**ces erreurs révèlent une manière de connaître**»**. Elles constituent un élément important de l’apprentissage : apprendre, c’est avoir reconnu et rejeté des conceptions erronées et les avoir remplacées par des conceptions correctes.  Faire dégager la principale interprétation : les élèves appliquent sur ces nombres les mêmes règles celles qu’ils appliquent sur les entiers. Les décimaux ne sont pas vus comme de nouveaux nombres, mais comme deux entiers écrits côte à côte et séparés par une virgule.  Prise de conscience à faire émerger : des séances d’entraînement à l’aide d’exercices, le renforcement d’automatismes ne permettront donc pas d’améliorer les compétences des élèves. Il est nécessaire de reconsidérer les apprentissages en prenant en compte ces conceptions qu’il convient de faire évoluer. | Eléments d’analyse et d’interprétation :  *Exercice 11 :*   * 6,25 + 4,68 🡪 10,93 7,24 – 4,3 = 7,81 * la somme des parties décimales est calculée mais la « retenue » n’est pas reportée sur la partie entière * la soustraction posée révèle une non prise en compte de la virgule ; l’élève « cadre » les nombres à droite, comme s’ils étaient des entiers, puis il calcule la différence sans « transporter » la retenue sur la partie entière. * 7,24 – 4,3 🡪 3,06 : calcul de 7 – 4 et de 30 – 24   🡪 11,54 (ou 3,54) : 7+4 (ou 7- 4) et de 24 + 30  *Exercice 15 : ordre sur les décimaux*  1,923 < 2,7 < 2,15 : comparaison des parties entières ; si mêmes parties entières, comparaison de la partie décimale comme sur les entiers (2,7 < 2,15 car 7 < 15).  2,7 < 2,15 < 1,923 : application de la règle « plus un nombre a de chiffres, plus il est grand ».  *Exercice 18*: les deux nombres de part et d’autre de la virgule sont traités comme des entiers. | Les erreurs proposées ci-contre sont souvent produites par les élèves. Elles manifestent l’application de connaissances erronées qu’il convient d’identifier afin de proposer des aides aux élèves.  Ces deux réponses ont été fournies par le même élève. Les deux décimaux à additionner ont le même nombre de décimales. On peut penser que pour calculer, par exemple 6,25 + 7,3, il aurait procédé comme pour la soustraction.  Ces erreurs permettent de mettre en évidence la connaissance erronée que l’élève utilise.  Les élèves traitent les décimaux comme des entiers et « transportent » sur ces nombres ce qu’ils appliquent sur les entiers. Cela signifie que ces nombres ne sont pas perçus comme de nouveaux nombres qui sont en rupture avec les entiers. Cette conception sera un obstacle à leur construction et à l’élaboration de règles propres ainsi qu’à leur utilisation. |
| *Phase2*  *(30 min)*  *utiliser une bande unité pliable pour exprimer la longueur d’un segment* | Préciser aux stagiaires qu’ils vont réaliser une activité que l’on peut donner effectivement à des élèves de l’école primaire, puis qu’ils devront analyser cette activité.  Organisation du travail : prévoir des groupes de deux et constituer des paires de groupes non voisins (s’il y a un nombre impair de groupes, faire deux groupes de trois). Demander à chaque groupe de se munir d’une feuille A4 et d’une règle.   1. Donner la *consigne 1* suivante : *Sur votre feuille unie, tracez au stylo à bille un segment [AB] en marquant précisément les extrémités ».*   Distribuer alors à chaque groupe une bande de papier, dite « bande unité U » qui va servir à mesurer la longueur du segment.  Bien préciser que toutes les bandes ont même longueur. Faire marquer en rouge une longueur de la bande Puis donner la deuxième consigne.  *Consigne 2 :Vous allez écrire un message pour qu’un groupe de collègues, qui n’est pas votre voisin, construise un segment exactement de la même longueur que le vôtre. Pour cela, vous allez lui envoyer des informations, mais vous ne devez en aucun cas utiliser votre règle graduée, ou faire un dessin. Vous ne devez utiliser que la bande de papier que vous avez reçue et qui va nous servir d’unité de longueur. Vous avez tous des bandes unités de même longueur, vous n’enverrez pas votre bande avec votre message.*  Laisser environ 10 min puis donner la 3e consigne.  *Consigne 3 : Échangez vos messages entre les groupes deux à deux et construisez un segment qui correspond au message que vous avez reçu.*  Laissez environ 5 min puis faire procéder, par paire de groupes, à la comparaison des longueurs des segments construits et des segments associés au message.   1. Procéder à une mise en commun afin de :   -  mettre en évidence les procédures de comparaison utilisées : superposition par transparence, report d’un segment sur l’autre, utilisation de papier calque, d’une bande de papier auxiliaire, du compas ;  -  contrôler les résultats : les segments construits sont-ils superposables aux segments dont on a donné la mesure ? Sinon, pourquoi ?  -  examiner les messages émis. Il est rare que les segments dessinés aient une mesure de longueur qui s’exprime par un nombre entier d’unité u. Recenser les différentes catégories de messages produits.  - faire émerger les expressions « un demi » « un quart » « n les associant aux manipulations de pliage correspondant. | * Construction d’un segment. * Utilisation de la bande unité U pour exprimer la longueur de ce segment. * Recherche d’une procédure qui permet d’exprimer cette longueur en vue de faire tracer un segment de même longueur. * Ecriture du message. * Echange de messages entre deux groupes. * Décodage du message reçu et tracé du segment répondant aux consignes du message. | Le tracé en rouge est fait pour bien visualiser la longueur de l’unité : l’unité n’est pas la bande, mais sa longueur.  Il est probable que les stagiaires penseront au pliage de la bande et à l’utilisation des fractions 1/2, 1/4, etc.  Avec des élèves, on peut s’attendre à des messages du type :   * « mon segment mesure un peu plus de deux unités. » ; * « j’ai dessiné un segment, il fait entre 3 et 4 unités. » ; * « Dessine un segment, tu reportes 2 fois la bande, puis tu plies la bande en 2 et tu reportes encore une moitié et encore un peu plus. » ; * etc. |
| *Activité 3*  *(40 min)*  *Analyser l’activité vécue en termes de but recherché et d’organisation de l’apprentissage.* | Suite à ce premier temps de travail portant sur une situation de classe, demander aux stagiaires d’échanger, par groupe de quatre, sur les deux points suivants :   1. Dégager le but de cette activité. 2. La situation choisie par l’enseignant est une situation de communication. Essayer de caractériser ce type de situation et d’en préciser l’intérêt.   Après un temps d’échange au sein de chaque groupe, mise en commun et débats collectifs afin de faire dégager les points explicités dans la colonne ci-contre :   * insuffisance des entiers: il est nécessaire de partager l’unité pour avoir des unités plus petites (partage de l’unité en parties de même longueur). Chaque longueur s’exprime par une écriture fractionnaire.   Dans une situation de communication: il y a un émetteur (ou un groupe émetteur) et un récepteur (ou un groupe récepteur). Dans une telle organisation, l’émetteur écrit un message qui doit être compris effectivement par d’autres puis décodé. La validation de la production ne revient alors pas à une tierce personne (souvent l’enseignant) mais est incluse dans la situation. | * Echanges pour dégager l’explicitation du but recherché. * ce n’est pas d’aboutir à des messages efficaces mais de faire prendre conscience que les nombres entiers ne suffisent généralement pas pour exprimer la longueur d’un segment avec une unité donnée.   ½ est la longueur de la moitié de la bande (bande pliée en deux) ; ¼ est la longueur du quart de la bande (bande pliée en quatre).Quand on partage l’unité en deux, chaque moitié à pour longueur ½. | Insister sur cette prise de conscience pour que les fractions apparaissent bien d’une part comme des nombres, d’autre part comme des nombres différents des entiers.  On peut demander aussi de faire tracer un segment de longueur 3 u + ½ u.  Dans une telle situation, les erreurs peuvent provenir du message lui-même mais aussi de la compréhension et du décodage du message par le récepteur. L’intérêt de faire les contrôles des productions en présence et des émetteurs et des récepteurs est la prise de conscience des deux parties des ambiguïtés des messages, des erreurs, etc. et des améliorations à apporter. |
| *Phase 4*  *(20 min)*  *Découvrir d’autres fractions*  *Prendre conscience que ce sont de nouveaux nombres, qui ne fonctionnent pas comme les entiers.* | Demander aux stagiaires de plier leur bande en trois, en cinq, en dix et constater la difficulté liée à la manipulation.  Distribuer la fiche « Partageur de segments et le faire observer.  Faire dégager que c’est un faisceau de droites parallèles équidistantes et constater que ce faisceau de droites détermine sur toute sécante des segments de même longueur (théorème de Thalès).  Faire déterminer quelques partages de la bande unité, dont le partage en dix. Répartir ces partages au sein des groupes : partage en deux, quatre, cinq, trois.  Faire tracer des segments de 4/10 u, 2u + 3/10, 10/10 u.  Les élèves doivent alors percevoir la fraction comme un nouveau nombre, ce n’est pas un entier. Ce nouveau nombre permet de résoudre des problèmes que les entiers ne permettent pas de résoudre. | * Découverte et utilisation du « partageur de segment ». * Echanges pour dégager l’explicitation du but recherché. * Ecriture des différentes fractions mesurant les longueurs des parts, ou de plusieurs parts. * Comparaison de ces fractions mesurant des longueurs (par comparaison des longueurs : ¼ est plus petit que 1/3, etc. * Explicitation, en situation de quelques égalités du type 2 fois 1/4, c’est la même chose que ½ ; 5/10 aussi ; 3/3 ou 10/10, c’est égal à 1, etc. | Il est bien évident que l’on n’évoquera pas le théorème de Thalès aux élèves !  Le « partageur de segment » est un outil au service des élèves, au même titre que l’équerre, le compas, etc. L’équerre permet de vérifier ou de tracer des angles droits, le « partageur de segment » permet de partager une longueur en n partie de même longueur.  Ce temps de travail est important avec les élèves pour qu’ils comprennent que l’on peut toujours partager une partie en n parts (et ainsi, plus tard, envisager les 1/100, 1/1000) sans avoir à faire effectivement ces partages. |
| *Phase 5*  *(30 min)*  *Construi-re les écritures fraction-naires* | Demander aux stagiaires de prendre le Document 4.3 de leur module (extrait du manuel élève « Collection Diagonale » Mathématiques CM1 », éditions Nathan 2003 (programmes français) rassemblant les pages consacrées à la construction des décimaux). (Préciser que ces extraits ne constituent pas un « modèle » mais un document de travail qui peut alimenter la réflexion sur ce sujet en vue de construire des situations d’apprentissages dans le contexte béninois.  Faire prendre connaissance des trois premières pages et échanger sur les activités proposées.  Faire dégager que cette situation problème a pour objet de construire une nouvelle connaissance (les fractions puis les nombres décimaux) par rapport à une connaissance antérieure (les entiers). | * Description du « Partageur de segment » et utilisation pour partager le segment en n parties de même longueur. * Ecriture de fractions correspondant à un partage. * Mesurage et tracé de segments par report de l’unité et de fractions de l’unité. * Rédaction d’activités de partages portant sur les aires. * Rédaction d’un aide-mémoire sur les fractions : nouveaux nombres | Un faisceau de droites parallèles équidistantes peut être tracé au tableau pour favoriser une explication collective et réaliser quelques partages de segments.  Pour les élèves, les lignes de leur cahier peuvent être utilisées comme « partageur de segment ». |

**PHASE 6 : Quelques compléments théoriques sur fractions et décimaux**

Les notions de fractions et de nombres décimaux sont délicates à enseigner tant sont difficiles les concepts mis en jeu et leurs usages dans presque tous les domaines de la vie, aussi bien dans que hors des mathématiques.

L’existence de ces objets mathématiques que sont les décimaux va conduire les élèves à considérer que l’on peut construire de nouveaux nombres qui permettent de résoudre des problèmes qui n’ont pas de solution si on ne dispose que des nombres entiers naturels. De plus, ces nouveaux nombres possèdent les mêmes facilités d’utilisation que les entiers pour dénombrer, mesurer et calculer.

Les fractions sont historiquement bien antérieures aux décimaux puisqu’elles furent utilisées il y a plus de 4 000 ans par les Egyptiens alors que ce n’est qu’en 1585 que Simon Stevin a *inventé* les décimaux. Elles sont plus difficiles à manipuler que les décimaux dans les calculs simples (addition, soustraction, comparaison) mais elles sont beaucoup plus simples à se représenter et à construire.

D’un point de vue didactique les fractions sont l’axe central pour l’introduction des nombres décimaux, puisque parmi toutes les fractions, on va privilégier les fractions décimales, l’écriture à virgule étant alors présentée comme une convention d’écriture des fractions décimales.

Les activités d’introduction commencent, en général, par l’élaboration d’un code permettant d’écrire de nouveaux nombres : les fractions. Ces fractions sont introduites dans le cadre d’un problème de mesurage (expression d’une longueur en fonction d’une unité), puis l’écriture est généralisée et les fractions usuelles (demi, tiers, quart, dixième, centième, millième, …) font l’objet d’une étude plus systématique.

L’activité d’introduction des fractions consiste à mesurer les longueurs à l’aide d’une unité dans le cas où la mesure de l’objet à mesurer ne s’exprime pas à l’aide d’un multiple de l’unité. Il est alors nécessaire de partager l’unité en parties égales et à considérer ainsi des *fractions**d’unité*. Il reste à prolonger ce travail en utilisant des mesures de domaines dont on fractionne l’étendue.

Pour partager un segment en parties égales, il est possible d’utiliser le pliage pour des partages particuliers (en deux, en quatre, voire en trois) ; mais le partage en cinq, six ou sept est plus délicat. Un outil est alors utilisable ; un réseau de droites parallèles équidistantes. Le quadrillage d’un cahier peut être alors privilégié[[6]](#footnote-6).

Insistons sur le fait qu’il est fondamental que les élèves perçoivent les nombres décimaux comme de nouveaux nombres et non comme le « recollement » de deux entiers. Cette représentation du décimal est très présente dans l’esprit des élèves (renforcée par la lecture «deux cent quatre virgule deux cent trente - cinq » pour le nombre 204,235… pourquoi alors le premier 2 est le chiffre des centaines alors que le second, le chiffre des dixièmes ?).

L’utilisation du tableau de numération doit permettre de renforcer le sens s’il est accompagné d’explications. Il est important que les élèves aient toujours à l'esprit qu'une unité d'un ordre donné correspond à dix unités de l'ordre immédiatement inférieur :

1 centaine = 10 dizaines ;

1 dizaine = 10 unités ; 1 unité = 10 dixièmes ;

1 dixième = 10 centièmes, etc.

ou à un dixième de l'unité de l'ordre immédiatement supérieur :

1 dizaine = 1/10 d’une centaine ;

1 unité = 1/10 d'une dizaine ;

1/100 = 1/10 d'un dixième, etc.

Un travail important doit être consacré à l’utilisation de fractions décimales pour coder les graduations de la droite numérique : toute fraction décimale peut être placée entre deux entiers naturels consécutifs et permet de coder des graduations de plus en plus fines de la droite numérique. Il s’agit alors d’établir le rapport entre codages de points sur la droite et mesures de longueur : toute fraction décimale peut être encadrée par des nombres entiers, en particulier par des multiples de 10, 100, 1000, etc. et peut être décomposée en une somme d’un nombre entier et d’une fraction décimale inférieure à l’unité.

400/100 < 425/100<500 🡪 4< 425/100 < 5

425/100 = 4 + 25/100.

Une nouvelle écriture de ces fractions, sous forme de « nombres à virgule » est alors proposée. Le lien avec les unités usuelles et les usages sociaux des nombres à virgule peut alors être établi; les procédures de comparaison de deux nombres décimaux donnés sous leur écriture à virgule sont élaborées. Ce dernier point est très important : les élèves doivent avoir conscience que les règles de comparaison dans les nombres décimaux sont différentes de celles utilisées pour les nombres entiers. Ils vont réutiliser leurs connaissances sur la comparaison des nombres entiers, mais il faudra bien veiller à ce qu'ils ne considèrent pas un nombre décimal comme étant le recollement de deux entiers, et appliquent alors des règles sur les entiers à chacune des deux parties qui composent le décimal. C'est cette représentation qui les conduit par exemple à dire par exemple :

* qu'après 2,7 viennent 2,8 … 2,9 … 2,10 …2,11, etc.
* qu'il n'existe pas de nombre entre 3,4 et 3,5 ;
* que 5,12 est supérieur à 5,7 puisque 12 est plus grand que 7, etc.

On retrouve cette erreur plus tard lors du calcul de produits, par exemple : 2 x 3,4 = 6,l2 en faisant d’une part le produit des parties entières, d’autre part, le produit des parties décimales (2 x 3= 6 et 3 x 4= 12). Il est fondamental que les élèves aient conscience que la notion de successeur n'a pas de sens dans l’ensemble des nombres décimaux puisqu'entre deux décimaux, on peut toujours en intercaler un autre.

**Activité 6 : Retour sur l’ensemble des activités de l’unité**

Il s’agit de favoriser les échanges des participants sur les deux points retenus au niveau du cahier du participant.

1. [↑](#footnote-ref-1)
2. Texte extrait du chapitre 3 de « La numération, les opérations » de la collection « Euro Maths Enseigner les mathématiques au CE2 » Livre du maître, éditions Hatier Paris 2010. [↑](#footnote-ref-2)
3. Le cycle 2 en France, correspond aux classes de CI, CP et CE1 du Bénin. Le cycle 3 correspond, comme au Bénin, aux classes de CE2, CM1 et CM2. [↑](#footnote-ref-3)
4. B. Dufour-Janvier, N. Bednarz, « Construction des savoirs », Editions Agence d’Arc, 1999, Montréal [↑](#footnote-ref-4)
5. Mathématicien et didacticien français – *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherche en didactique des mathématiques, 1983 [↑](#footnote-ref-5)
6. Ce partage utilise la propriété du théorème de Thalès qui dit que des parallèles équidistantes déterminent sur n’importe quelle sécante des segments égaux. [↑](#footnote-ref-6)